פירוק לגורמים ונוסחאות כפל מקוצר-שימושים

פתרון משוואות ממעלות גבוהות

קביעת תחום הגדרה, פישוט ופעולות בשברים אלגבריים

אי שוויונות

1. הוכיחו כי הממוצע החשבוני של שני מספרים חיוביים, שווה או גדול מהממוצע ההנדסי,
כלומר עבור a ו-b חיוביים מתקיים: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

2. הוכיחו כי עבור כל a ו-b חיוביים מתקיים: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{2a}{b}-\frac{2b}{a}+3 \geq 0$

3. הוכיחו כי לכל a, b, c חיוביים מתקיים: $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$

הוכחות תכונות מספרים והתחלקות:

1. הוכיחו כי לכל n טבעי הביטוי n^3-n מתחלק ב-6 ללא שארית.

2. הוכיחו כי לכל n טבעי הביטוי n^3+3n^2+2n מתחלק ב-6 ללא שארית.

3. הוכיחו כי לכל n טבעי אי-זוגי הביטוי n^2-1 מתחלק ב-8 ללא שארית.

4. הוכיחו כי לכל n טבעי הביטוי n^5-n מתחלק ב-5 ללא שארית.

5. הוכיחו כי לכל n טבעי הביטוי n^5-n מתחלק ב-30 ללא שארית.

חישובים בע"פ

1. חשבו בע"פ: $3.02\cdot2.98$, $205\cdot195$ .....
2. חישוב ריבוע של מספר המסתיים בספרה 5 (למשל 85^2 , 215^2)

ביטויים עם שורשים

1. מצאו את ערך הביטוי (ללא מחשבון): $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}$
2. פשטו: $\sqrt{2\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$
3. פתרו את המשוואה: $\sqrt{a^2+4-4a}+\sqrt{a^2+9-6a}=1$
4. פשטו עד כמה שאפשר: $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{4}{\sqrt{2}}$
5. קבעו איזה ביטוי גדול יותר: $\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}\ \ ?\ \ 2\sqrt{a}$

השלמה לריבוע שלם

1. גיאומטריה אנליטית - משוואת מעגל:

   מצאו את המרכז ואת הרדיוס של המעגל שמשוואתו: $x^2+y^2+6x-10y+18=0$

2. פונקציה ריבועית- מציאת קודקוד הפרבולה:

   מצאו את שיעורי קודקוד הפרבולה שמשוואתה: $y=-2x^2-6x+5$

3. הוכחת נוסחת השורשים של משוואה ריבועית $ax^2+bx+c=0$

חקירת משוואות פרמטריות

1. עבור אילו ערכים של a למשוואה הנתונה פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, אף פתרון:

$$(a^2-1)x=(a^2-a-2)$$

2. נתונה המשוואות: $9bx-y=12a-9b \quad , \quad 4a^2x-by=4a^2$

קבעו עבור אילו ערכים של a ו-b, המשוואות מייצגות ישרים:

א. נחתכים ב. מתלכדים ג. מקבילים

הצעות לפתרון לחלק מהבעיות

אי שוויונות

1. הוכיחו כי הממוצע החשבוני של שני מספרים חיוביים, שווה או גדול מהממוצע ההנדסי.

כלומר עבור a ו-b חיוביים מתקיים: $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{a\,b}$

<u>פתרון</u>:

יש להוכיח: $a+b \ge 2\sqrt{a\,b}$ או $a+b-2\sqrt{a\,b} \ge 0$

$$a+b-2\sqrt{a\,b} = \left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0$$

2. הוכיחו כי עבור כל a ו-b חיוביים מתקיים: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{2a}{b}-\frac{2b}{a}+3 \ge 0$

<u>פתרון</u>:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{2a}{b}-\frac{2b}{a}+3 = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2+2\right]-2-2\left(\frac{a}{b}\right)-2\left(\frac{b}{a}\right)+3 =$$

$$= \left[\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2 - 2\left[\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{b}{a}\right)\right]+1$$

נסמן: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=t$ ונשאר להוכיח: $t^2-2t+1 \ge 0$ או $(t+1)^2 \ge 0$

3. הוכיחו כי לכל a, b, c חיוביים מתקיים: $a^2+b^2+c^2 \ge ab+ac+bc$

<u>פתרון</u>:

$$\left.\begin{array}{lll} (a-b)^2 \ge 0 & \Rightarrow & a^2+b^2 \ge 2ab \\ (a-c)^2 \ge 0 & \Rightarrow & a^2+c^2 \ge 2ac \\ (b-c)^2 \ge 0 & \Rightarrow & b^2+c^2 \ge 2bc \end{array}\right\} \Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2 \ge 2ab+2ac+2bc$$

הוכחות תכונות מספרים והתחלקות:

<u>הנחות בסיס</u>:

(I) מכפלת n מספרים עוקבים, מתחלקת ללא שארית בכל המספרים 2 עד n.

(II) אם למספר גורמים זרים זה לזה, הוא מתחלק ללא שארית במכפלתם.

1. הוכיחו כי לכל n טבעי הביטוי n^3-n מתחלק ב-6 ללא שארית.

<u>פתרון</u>:

$n^3-n=(n-1)n(n+1)$ סכום שלושה מספרים עוקבים מתחלק ב-2 וב-3 ולכן גם ב-6 ללא שארית.

2. הוכיחו כי לכל n טבעי הביטוי n^3+3n^2+2n מתחלק ב-6 ללא שארית.

<u>פתרון</u>:

$n^3+3n^2+2n=n(n+1)(n+2)$ סכום שלושה מספרים עוקבים מתחלק ב-6 ללא שארית.

3. הוכיחו כי לכל n טבעי אי-זוגי הביטוי n^2-1 מתחלק ב-8 ללא שארית.

<u>פתרון</u>:

נציב: $n = 2t+1$ ונקבל: $n^2-1=(2t+1)^2-1=4t^2+4t=4t(t+1)$

הביטוי מתחלק ב- 8, כיון ש-$t(t+1)$ שהוא מכפלת שני מספרים עוקבים הוא זוגי.

4. הוכיחו כי לכל n טבעי הביטוי n^5-n מתחלק ב-5 ללא שארית.

<u>פתרון</u>:

$$\begin{aligned}&n^5-n=n(n^4-1)=n(n-1)(n+1)(n^2+1)=n(n-1)(n+1)(n^2-4+5)=\\&=n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)+5n(n-1)(n+1)\end{aligned}$$

5. הוכיחו כי לכל n טבעי הביטוי n^5-n מתחלק ב-30 ללא שארית.

<u>פתרון</u>:

$$n^5-n=n(n^4-1)=n(n-1)(n+1)(n^2+1)=n(n-1)(n+1)(n^2-4+5)=$$
$$=n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)+5n(n-1)(n+1)$$

המחובר הראשון בביטוי $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ הוא מכפלת 5 מספרים עוקבים, ולכן מתחלק ב-2, 3, 5 ובמכפלתם, המחובר השני בביטוי הוא מכפלה של 5 ב $n(n-1)(n+1)$ שהוא מכפלה של 3 מספרים עוקבים המתחלקת ב-6.

חישובים בע"פ

1. חשבו בע"פ: $3.02\cdot2.98$, $205\cdot195$ .....

<u>פתרון</u>:

$$205\cdot195=(200+5)(200-5)=200^2-5^2=40{,}000-25=39{,}975$$
$$3.02\cdot2.98=(3+0.02)(3-0.02)=3^2-0.02^2=9-0.0004=8.9996$$

2. חישוב בע"פ של ריבוע מספר המסתיים בספרה 5:

<u>פתרון</u>:

נרשום את המספר: $10a+5$ (כאשר a הוא המספר ללא הספרה 5).

$$(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100a(a+1)+25$$

דוגמאות: $85^2=100\cdot8\cdot9+25=7200+25=7225$

$$215^2=100\cdot21\cdot22+25=46200+25=46225$$

ביטויים עם שורשים

1. מצאו את ערך הביטוי (ללא מחשבון): $\sqrt{28-10\sqrt3}+\sqrt{28+10\sqrt3}$

<u>פתרון א'</u>:

$$\sqrt{28-10\sqrt3}+\sqrt{28+10\sqrt3}=\sqrt{25-10\sqrt3+3}+\sqrt{25+10\sqrt3+3}=$$
$$=\sqrt{\left(5-\sqrt3\right)^2}+\sqrt{\left(5+\sqrt3\right)^2}=|5-\sqrt3|+|5+\sqrt3|=10$$

ניתן לרשום ישירות $\sqrt{\left(5-\sqrt3\right)^2}=5-\sqrt3$ כיון שהביטוי חיובי.

<u>פתרון ב'</u>:

נרשום את ערך הביטוי x. הביטוי חיובי, ולכן ניתן להעלות בריבוע את שני האגפים.

$$x=\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}} \qquad x>0$$
$$x^2=\left(\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}\right)^2$$
$$x^2=28-10\sqrt{3}+2\sqrt{\left(28-10\sqrt{3}\right)\left(28+10\sqrt{3}\right)}+28+10\sqrt{3}$$
$$x^2=56+2\sqrt{28^2-10^2\cdot 3}=56+2\cdot 22=100$$
$$x=10$$

2. פשטו: $\sqrt{\sqrt{2\sqrt{7+4\sqrt{3}}}-\sqrt{3}}$

<u>פתרון:</u>

$$7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\sqrt{2\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}-\sqrt{3}}$$
$$4+2\sqrt{3}=\left(1+\sqrt{3}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}}=\sqrt{1}=1$$

לכן: $\sqrt{\sqrt{2\sqrt{7+4\sqrt{3}}}-\sqrt{3}}=1$

3. פתרו את המשוואה: $\sqrt{a^2+4-4a}+\sqrt{a^2+9-6a}=1$

<u>פתרון</u>:

$$\sqrt{a^2+4-4a}=\sqrt{(a-2)^2}=|a-2| \qquad \sqrt{a^2+9-6a}=\sqrt{(a-3)^2}=|a-3|$$

ונקבל את המשוואה: $|a-2|+|a-3|=1$ אותה ניתן לפתור לפי שיטת אינטרוולים.

4. רשום בצורה הפשוטה ביותר (חשב במידת האפשר): $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{4}{\sqrt{2}}$

<u>פתרון א'</u>:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)^2-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)^2-4\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(2+2\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{2}\left(2-2\sqrt{2}+1\right)-4(2-1)}{\sqrt{2}(2-1)}=$$

$$\frac{\sqrt{2}\left(2+2\sqrt{2}+1-2+2\sqrt{2}-1\right)-4(2-1)}{\sqrt{2}(2-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(2+2\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{2}\left(2-2\sqrt{2}+1\right)-4}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}}=\frac{8-4}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

<u>פתרון ב׳</u>:

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2-\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}-\frac{2\cdot 2}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\left(2+2\sqrt{2}+1\right)-\left(2-2\sqrt{2}+1\right)}{(2-1)}-4\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{1}-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

5. א. קבעו איזה ביטוי גדול יותר: $\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}\quad ?\quad 2\sqrt{a}$

ב. קבעו איזה ביטוי גדול יותר: $\sqrt{2008}+\sqrt{2010}\quad ?\quad 2\sqrt{2009}$

<u>פתרון</u>:

א. תחום הגדרה עבור a: $a\ge 1\ \cap\ a\ge -1\ \cap\ a\ge 0\ \Rightarrow\ a\ge 1$

כיון שכל הביטויים חיוביים נתייחס לבעיה השקולה: $\left(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}\right)^2\quad ?\quad \left(2\sqrt{a}\right)^2$

$$\left(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}\right)^2=a-1+2\sqrt{a-1}\cdot\sqrt{a+1}+a+1=2a+2\sqrt{a^2-1}$$

$$\left(2\sqrt{a}\right)^2=4a$$

$$2a+2\sqrt{a^2-1}\quad ?\quad 4a$$

$$\sqrt{a^2-1}\quad ?\quad a$$

כנ״ל נתייחס לבעיה השקולה: $a^2-1\quad ?\quad a^2$

$$a^2-1<a^2\ \Rightarrow\ \sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}<2\sqrt{a}$$

ב. לפי סעיף א׳: $\sqrt{2008}+\sqrt{2010}<2\sqrt{2009}$

השלמה לריבוע שלם

1. גיאומטריה אנליטית - משוואת מעגל:

מצאו את המרכז ואת הרדיוס של המעגל שמשוואתו: $x^2+y^2+6x-10y+18=0$

<u>פתרון</u>:

$$(x+3)^2+(y-5)^2=-18+3^2+5^2$$
$$(x+3)^2+(y-5)^2=4^2 \quad \Rightarrow M(-3,5) \qquad R=4$$

2. פונקציה ריבועית- מציאת קודקוד הפרבולה:

מצאו את שיעורי קודקוד הפרבולה שמשוואתה: $y=-2x^2-6x+5$

<u>פתרון</u>:

נסמן את הקודקוד: $M(x_M,y_M)$

עלינו לרשום את המשוואה בצורת: $y=a(x-x_M)^2+y_M$.

$$y=-2x^2-6x+5=-2\left(x^2+3x+1.5^2-1.5^2\right)+5$$
$$y=-2(x+1.5)^2+2\cdot 2.25+5$$
$$y=-2(x+1.5)^2+9.5 \quad \Rightarrow \quad M(-1.5,9.5)$$

3. הוכחת נוסחת השורשים של משוואה ריבועית $ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$

<u>פתרון א</u>:

נחלק את המשוואה ב-a ונקבל: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

ע"י השלמה לריבוע שלם נקבל:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$$
$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

פתרונות המשוואה הריבועית הם :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad , \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

<u>פתרון ב</u> :

נכפול את המשוואה ב-4a ונקבל : $4a^2x^2+4abx+4ac=0$

ע"י השלמה לריבוע שלם נקבל :

$$(2ax+b)^2-b^2+4ac=0$$

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac$$

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

חקירת משוואות פרמטריות

1. עבור אילו ערכים של a למשוואה הנתונה פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, אף פתרון :

$$(a^2-1)x=(a^2-a-2)$$

<u>פתרון</u> :

$$(a-1)(a+1)x=(a+1)(a-2)$$

פתרון יחיד : $a\neq -1\ ,\ 1$, אינסוף פתרונות : $a=-1$, אף פתרון : $a=1$

2. נתונות המשוואות : $9bx-y=12a-9b \quad , \quad 4a^2x-by=4a^2$

קבעו עבור אילו ערכים של a ו-b, המשוואות מייצגות ישרים :

א. נחתכים ב. מתלכדים ג. מקבילים

<u>פתרון</u> :

$$\begin{cases} 4a^2x - by = 4a^2 \\ 9bx - y = 12a - 9b \quad |\cdot(-b) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 4a^2x - by = 4a^2 \\ -9b^2x + by = -12ab - 9b^2 \end{cases}$$

$$4a^2x - 9b^2x = 4a^2 - 12ab - 9b^2$$

$$(2a-3b)(2a+3b)x = (2a-3b)^2$$

ישרים נחתכים $\Leftrightarrow$ פתרון יחיד למערכת $\qquad 2a \neq \pm 3b$

ישרים מתלכדים $\Leftrightarrow$ אינסוף פתרונות למערכת $\quad 2a = 3b$

במקרה זה נקבל את המשוואות: $9bx - y = 9b \quad , \quad 9b^2x - by = 9b^2$

או $y = 9bx - 9b$ לשתי המשוואות.

ישרים מקבילים $\Leftrightarrow$ אין פתרון למערכת $\quad 2a = -3b$

במקרה זה נקבל את המשוואות: $9bx - y = -27b \quad , \quad 9b^2x - by = 9b^2$

או $y = 9bx + 27b$, ו- $y = 9bx - 9b$.